PT Programme de Colles
Semaine 13

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

- Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque. Équation aux éléments propres $f(x) = \lambda x$. Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.
- Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée. Équation aux éléments propres $AX = \lambda X$. Spectre d'une matrice carrée
- La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée $\chi_A : x \mapsto \det(x\ I_n - A)$, Polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie
- Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.
- Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale
- Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E, si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de E.
- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Cas où χ_f est scindé à racines simples.
- Traduction matricielle des résultats précédents relatifs aux endomorphismes.
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.
- Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Traduction matricielle. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- Expressions du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable en fonction de ses valeurs propres.
- Théorème spectral : Toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable

Séries entières

- Série entière de variable réelle, de variable complexe
- Lemme d'Abel, Rayon de convergence d'une série entière, Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence.
- Conséquence sur les rayon des comparaisons entre séries, Critère de D'Alembert
- Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.
- Fonction somme d'une série entière. La fonction somme est continue sur son intervalle de définition. Théorème d'Abel radial
- Primitivation et dérivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Développements des fonctions usuelles : Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
- Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert. Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.